Quadrivettori

Relatività, Energia e Ambiente

Fossombrone (PU), Polo Scolastico "L. Donati", 12 maggio 2011

http://www.fondazioneocchialini.it

Prof. Domenico Galli
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

Trasformazioni di Lorentz e Rotazioni

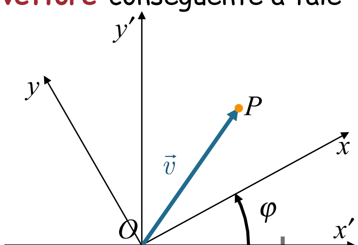
- Consideriamo ora le **trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \qquad \begin{cases} ct = \gamma\left(ct' + \beta x'\right) \\ x = \gamma\left(x' + \beta ct'\right) \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

- Esse descrivono la trasformazione delle 4 coordinate ct, x, y e z conseguenti al **cambiamento di SdR**, da un SdR inerziale a un altro.
- **Confrontiamo** queste relazioni con quelle relative a una **rotazione nello spazio ordinario**.

Rotazioni nello Spazio Ordinario

- Supponiamo che nello **spazio ordinario** a 3 dimensioni siano **ruotati gli assi cartesiani** di un **angolo** φ, p. es. attorno all'**asse** z.
- Scriviamo ora le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione** delle **coordinate di un punto** conseguente a tale rotazione.
- Oppure, il che è equivalente, le relazioni matematiche che descrivono la **trasformazione** delle **componenti di un vettore** conseguente a tale rotazione.

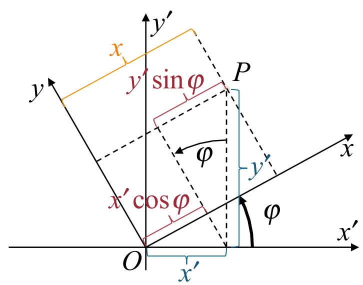


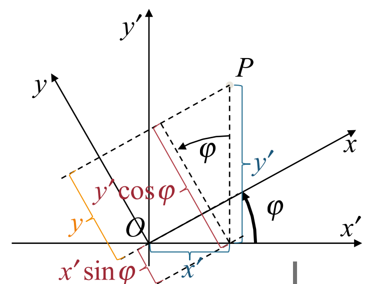
Rotazioni nello Spazio Ordinario (II)

- Come si vede dalle figure si ha:

$$\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}$$

(trasformazioni **inverse**)





Rotazioni nello Spazio Ordinario (III)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Per ottenere le **trasformazioni dirette** è sufficiente sostituire le variabili con gli apici a quelle senza apici e viceversa e sostituire all'angolo φ l'angolo $-\varphi$:

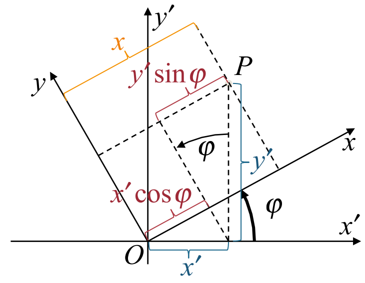
$$
\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \varphi \to -\varphi \\ \cos\varphi \to \cos\varphi \\ \sin\varphi \to -\sin\varphi \\ ct \to ct',\ ct' \to ct \\ x \to x',\ x' \to x \\ y \to y',\ y' \to y \\ z \to z',\ z' \to z \end{cases}
\qquad
\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}
$$

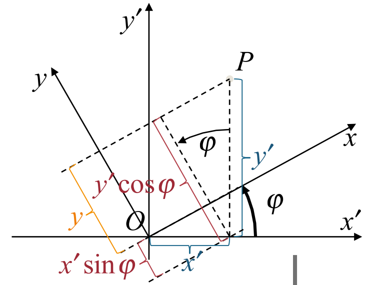
Rotazioni nello Spazio Ordinario (IV)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Le trasformazioni dirette e inverse che descrivono una rotazione attorno all'asse z sono quindi:

$$
\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}
\qquad
\begin{cases} ct = ct' \\ x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z = z' \end{cases}
$$





Rotazioni nello Spazio Ordinario (V)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Osserviamo che le **rotazioni non modificano** la **distanza d del punto P dall'origine O**:

$$
\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
d' &= \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{\left(x\cos\varphi - y\sin\varphi\right)^2 + \left(x\sin\varphi + y\cos\varphi\right)^2} = \\
&= \sqrt{x^2\cos^2\varphi + y^2\sin^2\varphi \cancel{-2xy\cos\varphi\sin\varphi} + x^2\sin^2\varphi + y^2\cos^2\varphi \cancel{+2xy\sin\varphi\cos\varphi}} = \\
&= \sqrt{x^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + y^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \sqrt{x^2 + y^2} = d
\end{aligned}
$$

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2 = d^2$$

Rotazioni nello Spazio Ordinario (VI)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Questo risultato può essere generalizzato a una **generica rotazione nello spazio 3-dimensionale**:

$$d'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

- La **distanza di un punto P dall'origine O** è un **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.
- La **norma di un vettore** è **invariante per rotazioni** nello spazio ordinario 3-dimensionale.

Rapidità

- Vediamo ora di scrivere le trasformazioni di Lorentz in una forma simile.
- Definiamo una nuova grandezza **adimensionale** (**numero puro**) chiamata **rapidità** φ:

$$\varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right]$$

- Si ha:

$$\varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right] = \ln\left[\frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] =$$

$$= \ln\left[\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma\left(1-\beta\right)}\right]$$

Rapidità (II)

- Dunque la **rapidità** si può anche scrivere come:

$$\varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right] = \ln\left[\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma\left(1-\beta\right)}\right]$$

- Inoltre si ha:

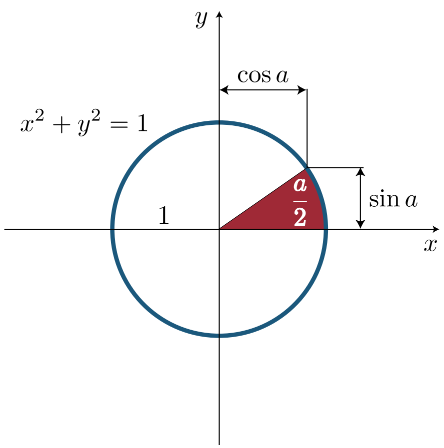
$$-\varphi = -\ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right] = \ln\left[\frac{1}{\gamma\left(1+\beta\right)}\right] = \ln\left[\gamma\left(1-\beta\right)\right]$$

$$e^{\varphi} = \gamma\left(1+\beta\right) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

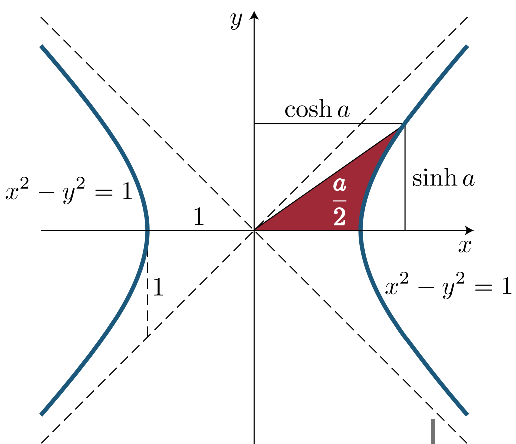
$$e^{-\varphi} = \gamma\left(1-\beta\right) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Funzioni Iperboliche

Funzioni Circolari

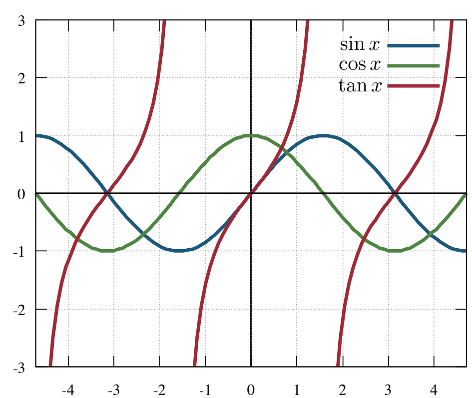


Funzioni Iperboliche

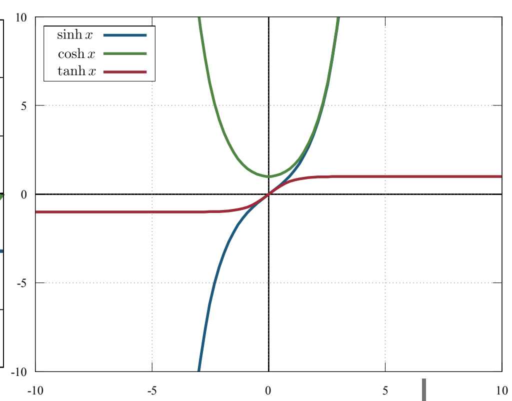


Funzioni Iperboliche (II)

Funzioni Circolari



Funzioni Iperboliche



Funzioni Iperboliche (III)

Funzioni Circolari

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \tan x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{i\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)} \end{cases}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Funzioni Iperboliche

$$\begin{cases} \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\ \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\ \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \end{cases}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Rapidità e Funzioni Iperboliche

- Utilizzando le funzioni iperboliche si ha, per la **rapidità** φ:

$$e^{\varphi} = \gamma\left(1+\beta\right)$$

$$e^{-\varphi} = \gamma\left(1-\beta\right)$$

$$\sinh\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma\left(\cancel{1}+\beta\right) - \gamma\left(\cancel{1}-\beta\right)}{2} = \gamma\,\beta$$

$$\cosh\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \frac{\gamma\left(1+\cancel{\beta}\right) + \gamma\left(1-\cancel{\beta}\right)}{2} = \gamma$$

Trasformazioni di Lorentz

- Utilizzando le **funzioni iperboliche** e la **rapidità**, si possono scrivere le **trasformazioni di Lorentz** nella forma:

$$\begin{cases} \gamma\,\beta = \sinh\varphi \\ \gamma = \cosh\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) = \gamma ct - \gamma\,\beta x = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) = \gamma x - \gamma\,\beta ct = x\cosh\varphi - ct\sinh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (II)

- Osserviamo che le **trasformazioni di Lorentz non modificano la quantità** $s^2 = c^2t^2 - x^2$:

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$s' = \sqrt{c^2t'^2 - x'^2} = \sqrt{\left(ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi\right)^2 - \left(-ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi\right)^2} =$$

$$= \sqrt{c^2t^2\cosh^2\varphi + x^2\sinh^2\varphi \cancel{-2ctx\cosh\varphi\sinh\varphi} - c^2t^2\sinh^2\varphi - x^2\cosh^2\varphi \cancel{+2ctx\sinh\varphi\cosh\varphi}} =$$

$$= \sqrt{c^2t^2\left(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right) - x^2\left(\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi\right)} = \sqrt{c^2t^2 - x^2} = s$$

$$s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 = s^2$$

Trasformazioni di Lorentz (III)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Confrontiamo ora le **Trasformazioni di Lorentz**:

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \varphi = \ln\left[\gamma\left(1+\beta\right)\right]$$

con le **rotazioni attorno all'asse z**:

$$\begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (IV)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Osserviamo che **rotazioni** e **trasformazioni di Lorentz** sono **analoghe nella forma**:
  - Le **rotazioni** attorno all'asse z "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate x e y;
  - Le **trasformazioni di Lorentz** "**mescolano**" (fanno combinazioni lineari) le coordinate ct e x.
- Le **trasformazioni di Lorentz** sono analoghe a "**rotazioni**" **tra** lo **spazio e** il **tempo**.

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Trasformazioni di Lorentz (V)

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Le differenze stanno nell'uso delle **funzioni circolari** per le **rotazioni** e delle **funzioni iperboliche** per le **trasformazioni di Lorentz**.
- Inoltre (e conseguentemente) c'e' un **segno** relativo diverso nella espressione dell'**invariante**:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 & \text{(rotazioni)} \\ s^2 = c^2t^2 - x^2 & \text{(trasformazioni di Lorentz)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ct' = ct\cosh\varphi - x\sinh\varphi \\ x' = -ct\sinh\varphi + x\cosh\varphi \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}, \qquad \begin{cases} ct' = ct \\ x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = z \end{cases}$$

Spazio-Tempo

FONDAZIONE GIUSEPPE OCCHIALINI

- Possiamo quindi pensare di formare **punti** e **vettori** in uno **spazio a 4 dimensioni** (**Spazio-Tempo**), con le componenti:

$$\left(ct, x, y, z\right)$$

- Un punto dello Spazio-tempo è detto **evento**.
- Potremo inoltre definire un **invariante** generale (l'**analogo della norma** di un vettore in 3 dimensioni):

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Questo invariante non viene modificato né da una rotazione, né da una trasformazione di Lorentz:
  - Il fatto che questo invariante non si modifichi nelle trasformazioni di Lorentz è una espressione dell'**invarianza della velocità della luce** nel vuoto.

Spazio-Tempo (II)

- Una **rotazione ordinaria** modifica il nostro **punto di vista** spaziale:
  - Può avvenire sui **piani** xy, yz e zx.
- Una **trasformazione di Lorentz** modifica il nostro **punto di vista** facendoci passare da un SdR inerziale a un altro SdR inerziale in moto rispetto al primo:
  - È una "rotazione" che può avvenire sui **piani** tx, ty e tz.
- L'idea di uno spazio-tempo 4-dimensionale è di **Hermann Minkowski** (1864-1909).
  - Questo particolare spazio è detto perciò **spazio di Minkowski**.

Spazio-Tempo (III)

- Un **punto materiale** è rappresentato da una linea nello **spazio-tempo**, denominata **linea d'universo**.
- Un oggetto che occupa spazio e che si estende per una certa durata di tempo occupa una specie di "**bolla**" nello spazio-tempo.
  - Quando ci muoviamo a **diverse velocità** vediamo questa bolla da un **diverso punto di vista**.

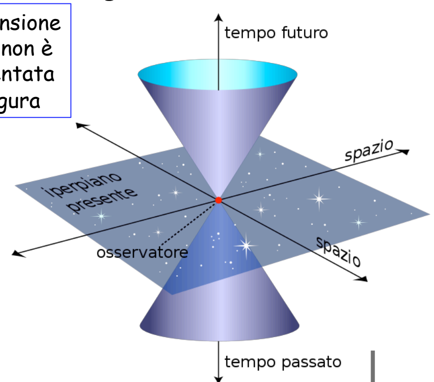
Spazio-Tempo (IV)

- Dato un evento (ct_0, x_0, y_0, z_0), la "**iper-superficie**" conica nello spazio-tempo a 4 dimensioni di equazione:

$$c^2\left(t-t_0\right)^2-\left(x-x_0\right)^2-\left(y-y_0\right)^2-\left(z-z_0\right)^2=0$$

(**cono di luce**) divide lo spazio-tempo in 3 regioni distinte:
  - **Passato assoluto**;
  - **Futuro assoluto**;
  - **Separazione assoluta**.

Una dimensione spaziale non è rappresentata nella figura



- La linea di universo di un **fotone** sta **sulla superficie del cono di luce**.
- La linea di universo di una **particella con massa** sta **entro il cono di luce**.

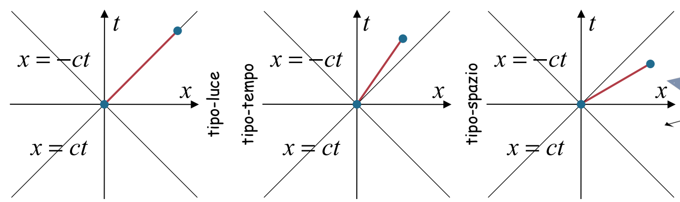
Spazio-Tempo (V)

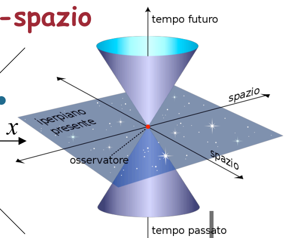
- La **proprietà** di un evento, per esempio (ct_2, x_2, y_2, z_2), di trovarsi **entro il cono di luce di un altro evento**, per esempio (ct_1, x_1, y_1, z_1), **non dipende dal SdR**. (è invariante per trasformazioni di Lorentz).
- Gli **intervalli** dello **spazio-tempo** si classificano in:

$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2 \quad \textbf{tipo-luce}$$

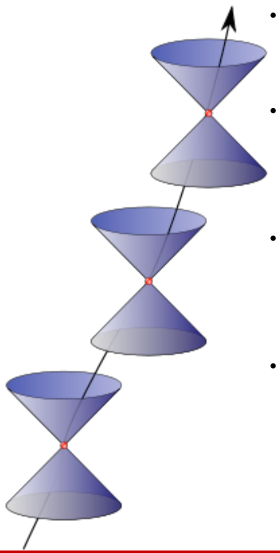
$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2>\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2 \quad \textbf{tipo-tempo}$$

$$c^2\left(t_2-t_1\right)^2<\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2 \quad \textbf{tipo-spazio}$$

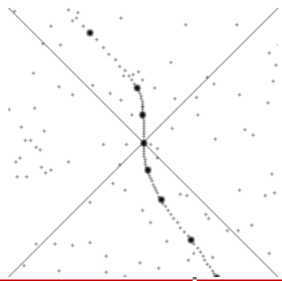




Spazio-Tempo (VI)



- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-tempo** vi **può** essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-spazio** <u>non</u> vi **può** essere un **nesso di causalità**.
- Tra 2 eventi separati da un intervallo di **tipo-luce** vi può essere un nesso con un segnale luminoso.
- L'intervallo tra due punti della **linea di universo** di un punto materiale è sempre di **tipo-tempo**.



Quadri-Vettori

- Si chiama **quadri-vettore** o **4-vettore**, un vettore dello **spazio di Minkowski**.
- Un esempio di quadrivettore è costituito dalle **4 coordinate** di un **evento**:

$$\bar{s} = \left(ct, \vec{r}\right) = \left(ct, x, y, z\right)$$

- È un 4-vettore anche l'**intervallo di universo** tra due eventi:

$$\Delta\bar{s} = \left(c\Delta t, \Delta\vec{r}\right) = \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = \left(c\left(t_2 - t_1\right),\ x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\right)$$

Norma di un Quadri-Vettore

- La **norma di Minkowski** di un **4-vettore** dello **spazio di Minkowski**:

  $$\bar{s} = \left(ct, \vec{r}\right) = \left(ct, x, y, z\right)$$

  si calcola come:

  $$\left\|\bar{s}\right\| = \sqrt{c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

  (si osservi il **segno "+"** nella **coordinata temporale** e il **segno "–"** nelle **coordinate spaziali**).
- Così per il 4-vettore:

  $$\Delta\bar{s} = \left(c\Delta t, \Delta\vec{r}\right) = \left(c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = \left(c\left(t_2 - t_1\right), x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right)$$

  si ha:

  $$\left\|\Delta\bar{s}\right\| = \sqrt{c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

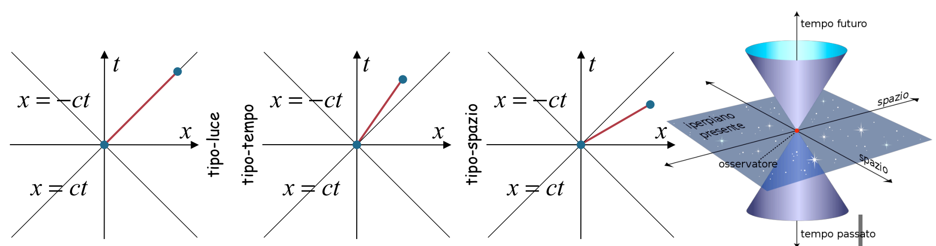
Norma di un Quadri-Vettore (II)

- Avremo pertanto, per gli **intervalli** dello **spazio-tempo**:

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta\bar{s}\right\| = 0 \qquad \textbf{tipo-luce}$$

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta\bar{s}\right\| \in \mathbb{R} \qquad \textbf{tipo-tempo}$$

$$\left\|\Delta\bar{s}\right\|^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta\bar{s}\right\| \in \Im \qquad \textbf{tipo-spazio}$$



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Prof. Domenico Galli

Dipartimento di Fisica

domenico.galli@unibo.it

http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli

https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica